Lezione 20

Sottovarietà pseudo-Riemanniane

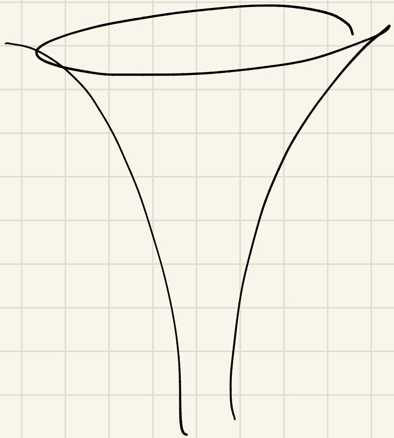
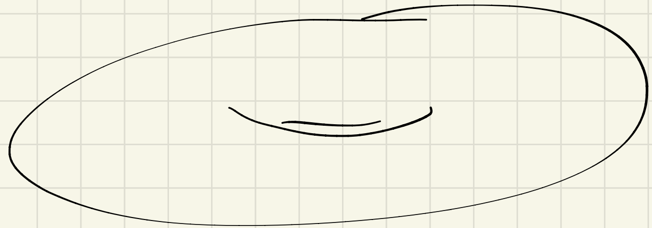
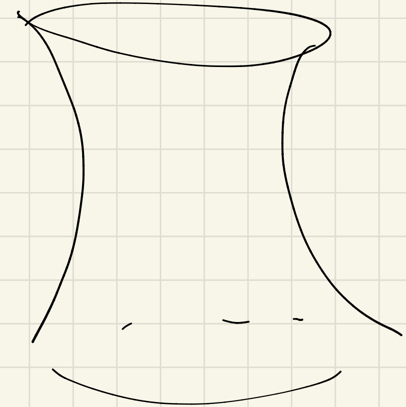
(M, g) varietà pR

Def: Un sottoinsieme $S \subseteq M$ è una sottovarietà pR se
1) è sottovarietà liscia di M
2) $g|_{T_pS}$ non degenere

Oss: g induce su S una struttura di varietà pR

Oss: Se g è def + 2) è vuota

Es: $S \subseteq \mathbb{R}^n$ sottovarietà è sempre sottovarietà Riemanniana

$S \subseteq \mathbb{R}^3$

2° QUADRICHE

(1° SOTTOSPAZI AFFINI: $\mathbb{R}^{p,q}$ $\quad g = \begin{pmatrix} -I_q & 0 \\ 0 & I_p \end{pmatrix}$)

$S \subseteq \mathbb{R}^{p,q}$ affine se $g|_S$ è non degener.

$\Rightarrow$ è sottovarietà pR $\quad$ Ex: $S \underset{\text{isom.}}{\cong} \mathbb{R}^{p',q'}$

dove (p',q') è la segnatura di S

$\mathbb{R}^{p,q}$ $\quad Q(x,y) = {}^t x \cdot \begin{pmatrix} -I_q & 0 \\ 0 & I_p \end{pmatrix} \cdot y$ forma bilineare

$$= -x_1 y_1 - \dots - x_q y_q + x_{q+1} y_{q+1} + \dots + x_{p+q} y_{p+q}$$

$$S^{p,q} = \{ x \in \mathbb{R}^{p+1,q} \mid Q(x,x) = 1 \}$$

$$H^{p,q} = \{ x \in \mathbb{R}^{p,q+1} \mid Q(x,x) = -1 \}$$

Prop: $S^{p,q}$ e $H^{p,q}$ sono sottovarietà pR di segnatura (p,q).

Inoltre $\forall x \in S^{p,q} \vee H^{p,q}$

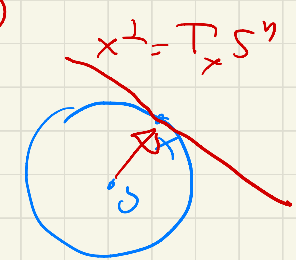
rispetto a Q

$$T_x S^{p,q} = x^{\perp} \qquad T_x H^{p,q} = x^{\perp}$$

dim:

$$Q(x+y, x+y) =$$

$S^{n,0} = S^n$



$$Q(x,x) + 2Q(x,y) + Q(y,y)$$

$$f(x) = Q(x,x) \Rightarrow df_x(y) = 2Q(x,y)$$

$$S^{p,q} = \{x \in \mathbb{R}^{p+1,q} \mid f(x) = 1\}$$

$\Downarrow$

1 è val. reg. per f

$\Rightarrow$ $S^{p,q}$ è sottovarietà liscia

Inoltre $\forall x \in S^{p,q}$, $T_x S^{p,q} = \operatorname{Ker} df_x = x^\perp$

Quindi $g|_{T_x S^{p,q}} = g|_{x^\perp}$ è non deg. e ha segnatura (p,q).

<u>Oss:</u> $\mathbb{R}^{p,q} \xrightarrow[\sim]{f} \mathbb{R}^{q,p}$ isomorfismo lineare (non isometria!)

$$(x_1, \dots, x_n) \longmapsto (x_{q+1}, \dots, x_n, x_1, \dots, x_q)$$

è tale che $Q(f(x), f(y)) = -Q(x,y)$

DESTRA SINISTRA

Induce un diffeomorfismo

$S^{p,q} \xrightarrow{\sim} H^{q,p}$ è $\boxed{-\text{isometria}}$

Esempi Riemanniani: $S^{p,0} = S^p$ e $H^{p,0} = H^p$ $\quad (S^{p,0} \simeq H^{0,p})$

$$H^{n,0} = \{ x \in \mathbb{R}^{n,1} \mid Q(x,x) = -1 \}$$

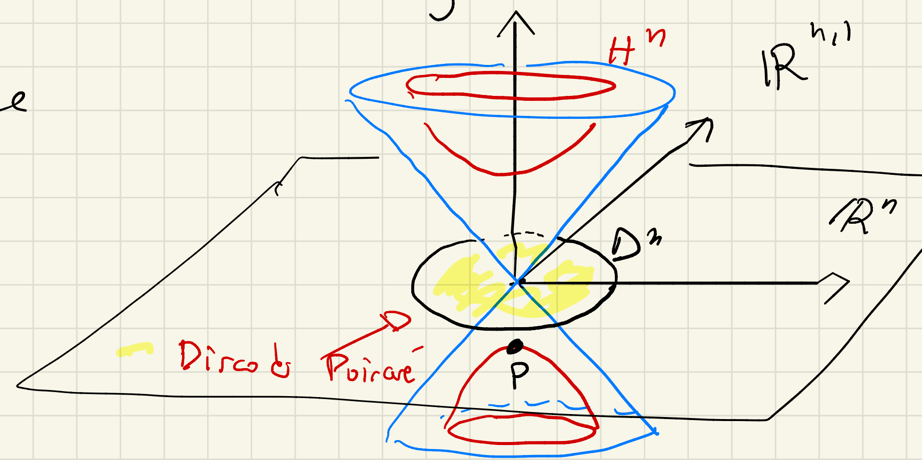
$$= \{ x \in \mathbb{R}^{n,1} \mid -x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 = -1 \}$$

è Riemanniana contenuta in $\mathbb{R}^{n,1}$ Lorentziana

iperboloide a due falde

$\mathbb{R}^{2,1}$

$P = (0, \dots, 0, -1)$



La proiez. lungo P fornisce un diffeo $D^n \to H^n$ che (esercizio tedioso) è un'isometria.

$$\boxed{\begin{array}{l} S^{p,q} \subseteq \mathbb{R}^{p+1,q} \\ H^{p,q} \subseteq \mathbb{R}^{p,q+1} \end{array}}$$

<u>Prop</u>: $O(p+1,q) < \mathrm{Isom}(S^{p,q})$
$O(p,q+1) < \mathrm{Isom}(H^{p,q})$

(vedremo $=$)

<u>dim</u>: $O(p+1,q)$ preserva Q

quindi manda $S^{p,q} = \{x \mid Q(x,x)=1\}$

in sé con un diffeo

che è anche isometria perché $g(x) = Q|_{T_x}$

$$O(a,b) = \{A \in GL(n,\mathbb{R}) \mid {}^tA\, J_{a,b}\, A = J_{a,b}\}$$

$$J_{a,b} = \begin{pmatrix} -I_b & \\ & I_a \end{pmatrix}$$

$$O(a,b) < \mathrm{Isom}(\mathbb{R}^{a,b})$$

$$\left\{ f(x) = Ax + b \;\middle|\; A \in O(a,b) \right\} < \mathrm{Isom}(\mathbb{R}^{a,b})$$

$=$ vedremo

<u>Es:</u> $\mathrm{Isom}(S^2) \geq O(3)$

$\mathrm{Isom}(S^n) \geq O(n+1)$

$\mathrm{Isom}(H^n) \geq O(n,1)$

(M^n, g) Riemanniana $\exists\ W \subseteq \mathbb{R}^N$ sottovarietà isometrica a M

<u>Teorema di Nash</u>